[Bernis p.47]

leçon 204
214
215
220

Développement :
Théorème d'Hadamard - Lévy :

<u>Oral</u> On admet le théorème de Cauchy Lipschitz à paramètre !

<u>Théorème :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.
Les deux propositions suivante sont équivalentes :
i) L'application f est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$
ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $D_x f$ inversible et $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

⚠ Le thm demeure vrai sous l'hypothèse f est $\mathcal{C}^1$ mais la preuve est plus difficile.

<u>Remarque :</u> $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty \iff$ l'image réciproque de tout compact par f est compacte.

<u>Preuve :</u>

$\boxed{\Rightarrow}$ $f^{-1} \circ f = Id_{\mathbb{R}^n}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ donc $D_{f(x)} f^{-1} \circ D_x f = Id_{\mathbb{R}^n}$.
Ainsi $D_x f$ est inversible à gauche, donc inversible car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, d'inverse $D_{f(x)} f^{-1}$.

$\forall R \in \mathbb{R}_+^*$, l'image réciproque de $\overline{B(0,R)}$ est un compact, car elle se confond avec l'image directe de cet ensemble par f^{-1} qui est continue. Donc $f^{-1}(\overline{B(0,R)}) \subset \overline{B(0,A)}$, $A \in \mathbb{R}$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}^n$, si $\|x\| > A$, alors $\|f(x)\| > R$.
Autrement dit : $\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Quitte à remplacer f par $f - f(0)$ (qui vérifie les même hypothèses que f), on peut supposer $f(0)=0$.

▶ Montrons l'existence d'un inverse à droite pour f. Pour ce faire nous construisons $s : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, où I intervalle ouvert contenant 0 et 1 tq (1): $\boxed{\forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n,\ f \circ s(t,x) = tx}$. Alors $s(1,\cdot)$ sera inverse à droite de f : c'est la méthode des chemins.

Soit I un intervalle contenant 0 et 1. Soit $s : \begin{array}{ccc} I \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (t, x) & \mapsto & s(t,x) \end{array}$ une application dérivable selon la première variable.

$$f \circ s(t,x) = tx \underset{\text{on dérive en } t}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} D_{s(t,x)} f \circ \partial_t s(t,x) = x \\ \text{et} \\ f \circ s(0,x) = 0 \end{cases} \quad \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \partial_t s(t,x) = (D_{s(t,x)} f)^{-1} \circ x \\ \text{et} \\ s(0,x) \in f^{-1}(\{0\}) \end{cases} \quad \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n$$

Ainsi, si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $s(\cdot, x)$ est solution sur I du problème de Cauchy à paramètre (2): $\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = (D_y f)^{-1} \circ x \\ y(0) = 0 \end{cases}$, alors s vérifie (1)

Notons $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & (D_y f)^{-1} \circ x \end{array}$.

F est de classe C^1. En effet, F est la composée des applicat° C^1 :

- $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x \text{ ou } y \end{array}$ (linéaire en dimension finie)
- $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ y & \mapsto & D_y f \end{array}$ (car $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$)
- $\begin{array}{ccc} GL(\mathbb{R}^n) & \to & GL(\mathbb{R}^n) \\ \ell & \mapsto & \ell^{-1} \end{array}$ (voir TD calcul diff)
- $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ (\ell, x) & \mapsto & \ell(x) \end{array}$ (bilinéaire en dim finie)

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $F(x,\cdot)$ est $\mathcal{C}^1$ (donc lipschitzienne) donc par le thm de Cauchy Lipschitz, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists!$ solution maximale de (2) notée $s(\cdot,x)$, définie sur un intervalle ouvert $]t^-(x), t^+(x)[$ contenant 0. Mq $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $t^+(x) > 1$:

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons par l'absurde $t^+(x_0) \leq 1$. Alors par le principe de sortie de tout compact, on a : $\lim\limits_{t \to t^+(x_0)} \| s(t,x_0)\| = +\infty$. Donc par hypothèse, $\lim\limits_{t \to t^+(x_0)} \| f \circ s(t,x_0) \| = +\infty$. Mais $\| f \circ s(t,x_0) \| = \| t x_0 \| \xrightarrow[t \to t^+(x_0)]{} t^+(x_0) . \|x_0\|$ ce qui est absurde. Ainsi $t^+(x_0) = +\infty$, et donc $t^+(x_0) > 1$.

On peut donc définir l'application $s_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$x \longmapsto s(1,x)$

et alors, $f \circ s_1 = Id_{\mathbb{R}^n}$.

Comme F est $\mathcal{C}^1$, le thm de Cauchy Lipschitz à paramètre assure que la restriction de s à $[0,1] \times \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$ et qu'a fortiori, s_1 est de classe $\mathcal{C}^1$.

▶ Montrons que f est une bijection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$

* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f \circ s_1(x) = x$. Donc f est surjective.
* Pour mq l'injectivité de f, mq s_1 est surjective (par un argument de connexité).
  . Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ tq $(s_1(x_k))_{k \in \mathbb{N}} \xrightarrow{k \to +\infty} y \in \mathbb{R}^n$.
  Par continuité de f, $\lim\limits_{k \to +\infty} f \circ s_1(x_k) = f(y)$. Ainsi, comme s_1 est un inverse à droite de f, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = f(y)$. Donc par continuité de s_1, on a $y = s_1(f(y))$. Ainsi $s_1(\mathbb{R}^n)$ est fermé.
  . Soit $y \in s_1(\mathbb{R}^n)$. On dispose de x tq $s_1(x) = y$ et comme $D_y f$ est inversible, par le théorème d'inversion locale, on dispose d'un voisinage ouvert U de x, d'un voisinage ouvert V de y tq f induise un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme ϕ de V sur U. Par continuité de s_1, on dispose d'un voisinage ouvert U' de x tq $U' \subset U$ et tq $s_1(U') \subset V$.

Alors $s_1(U') = \varphi^{-1}(\varphi(s_1(U'))) = \varphi^{-1}(f(s_1(U'))) = \varphi^{-1}(U')$

Mais $\varphi^{-1}(U')$ est l'image directe de U' par φ^{-1} et est aussi l'image réciproque de U' par φ donc un ouvert. Ainsi $s_1(U')$ est un ouvert inclus dans $s_1(\mathbb{R}^n)$ qui contient y. Donc $s_1(\mathbb{R}^n)$ est un voisinage de y.

Ainsi, $s_1(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert, car voisinage de chacun de ses points.

⚠ ici on pouvait aussi :

Soit $y \in s_1(\mathbb{R}^n)$. On doit exhiber un voisinage ouvert de y dans $s_1(\mathbb{R}^n)$.

$\exists x \in \mathbb{R}^n$ tq $y = s_1(x)$. f et s_1 étant $\mathcal{C}^1$, on peut différencier :

$$D_{s_1(x)} f \circ D_x s_1 = Id \quad (\text{car } f \circ s_1(x) = x)$$

Or la différentielle de f est inversible en tout point donc $D_x s_1$ est inversible. Par le thm d'inversion locale, $\exists$ des ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$ tq $x \in U$, $y \in V$ et $s_1 : U \to V$ est un $\mathcal{C}^1$ difféo. En particulier, on a trouvé un ouvert $V \subset s_1(\mathbb{R}^n)$ qui contient y. Donc $s_1(\mathbb{R}^n)$ ouvert.

- Par connexité de $\mathbb{R}^n$, $s_1(\mathbb{R}^n)$ étant ouvert, fermé non vide, $s_1(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

- Soit $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ tq $f(y_1) = f(y_2)$. Par surjectivité de s_1, choisissons x_1, x_2 de $\mathbb{R}^n$ tq $y_1 = s_1(x_1)$ et $y_2 = s_1(x_2)$. Comme s_1 inverse à droite de f, on a : $x_1 = f \circ s_1(x_1) = f(y_1) = f(y_2) = f \circ s_1(x_2) = x_2$

donc $y_1 = s_1(x_1) = s_1(x_2) = y_2$. Ainsi f injective.

▶ f est un $\mathcal{C}^1$ difféo

Ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$, bijective. Comme s_1 est inverse à droite de f, $s_1 = f^{-1}$. De plus, s_1 étant de classe $\mathcal{C}^1$, f est bien un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. ∎

Questions:

1) Et si f n'est que $\mathcal{C}^1$, qu'est ce qui ne marche plus ?

$\hookrightarrow$ $\mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $y \mapsto D_y f$ n'est plus $\mathcal{C}^1$ mais seulement $\mathcal{C}^0$...

2) def : f propre si $f^{-1}(K)$ est compact.

1) Mq f propre $\Rightarrow$ l'image de tout fermé est un fermé

Supposons f propre et F un fermé. Mq $f(F)$ fermé.
Soit (y_n) suite de $f(F)$ convergeant vers y. Soit $K = \{y_n\} \cup \{y\}$
$\exists (x_n) \in F$ tq $y_n = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $(x_n) = f^{-1}(K)$ et donc de (x_n) on peut extraire une sous suite cv $x_{\varphi(n)}$, tendant vers x. $x_{\varphi(n)} \in F$ et F fermé donc $x \in F$. f continue donc $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$, or $y_{(n)} \to y$ donc par unicité de la limite $y = f(x)$ donc $y \in f(F)$.

2) Mq f propre $\Leftrightarrow$ $\|f(x)\| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$

$\left\{\lim_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty\right\} \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists m > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)$.

(nous sommes dans $\mathbb{R}^n$)

$\boxed{\Rightarrow}$ Si f propre : Soit $M > 0$. Alors $B(0,M)$ compact donc $f^{-1}(B(0,M))$ compact donc borné, càd $\exists m > 0$ tq $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$.

Donc si $x \notin B(0,m)$, alors $f(x) \notin B(0,M)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme f est continue et que K est fermé, alors $f^{-1}(K)$ est <u>fermé</u>. K compact donc $\exists M > 0$ tq $K \subset B(0,M)$. Par hypothèse, $\exists m > 0$ tq $x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)$
càd "si $f(x) \in B(0,M)$, $x \in B(0,m)$" donc $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$.
Or, $K \subset B(0,M)$ donc $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$
donc $f^{-1}(K)$ <u>borné</u> donc <u>compact</u>.